## 問題 1

次の問いに答えよ。

**(1)** $x = 46656$ のとき，$e^{2\log x} = y^3$ を満たす実数 $y$ は $\boxed{\text{アイウエ}}$ である。

**(2)** ある会社で同じ製品を 2 つの工場 X，Y で製造していて，製品に不良品が含まれる確率は，工場 X では 2 %，工場 Y では 1 %である。工場 X の製品と工場 Y の製品を 5 : 2 の割合で混ぜた大量の製品の中から 1 個を取り出したところ，それが不良品であったとき，それが工場 X で製造された製品である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

**(3)** $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x+13}-b}{x-3} = \frac{1}{4}$ が成り立つような実数 $a$，$b$ は，$a = \boxed{\text{キ}}$，$b = \boxed{\text{ク}}$ である。

**(4)** $z = 1 - \sqrt{3}\,i$ のとき，$z^7 + az^5 - b = 0$ が成り立つような実数 $a$，$b$ は，$a = \boxed{\text{ケ}}$，$b = \boxed{\text{コサシ}}$ である。

**(5)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + 2\cos x}$ のとき，$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，$\dfrac{1}{4}\,f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \boxed{\text{ソタ}} - \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

**(6)** 正六面体のさいころと正八面体のさいころが 1 つずつある。正六面体のさいころの各面には 1 から 6 までの異なる整数がそれぞれ 1 つずつ書かれてあり，正八面体のさいころの各面には 1 から 8 までの異なる整数がそれぞれ 1 つずつ書かれてある。この 2 つのさいころを同時に投げて，正八面体のさいころの出た目を $a$，正六面体のさいころの出た目を $b$ とする。方程式 $ax^2 + bx + 1 = 0$ が異なる実数解をもつ確率は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

**(7)** $xy$ 平面上の双曲線 $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ 上に点 $\mathrm{P}(p, 4)$ をとる (ただし $p > 0$)。この双曲線の 2 焦点を F，F′ とすると，$\angle \mathrm{FPF'}$ の二等分線と $x$ 軸との交点は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}, 0\right)$ である。

**(8)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^7 x}dx = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

**(9)** $f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$ について，$1 < x < 2$ の範囲のすべての $x$ に対して $f(x) > 0$ であるための $a$ の値の範囲は $a \geqq \dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

**(10)** $n$ 段の階段を上がるのに，1 歩で 1 段または 2 段または 3 段上がることができるとする。$n = 12$ のとき，上がり方は $\boxed{\text{ホマミ}}$ 通りある。

**(11)** 三角形 ABC において，AB= 8，BC= 5，CA= 7 のとき，三角形 ABC の外心を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boxed{\text{ムメ}}$ である。

## 問題２

A，B，C の 3 人がおり，そのうち 1 人が 1 個のボールを持っている。3 人のうちボールを持っていない 2 人がゲームを行い，勝った人がボールを持っていた人からボールを受け取るという試行を繰り返す。A が B に勝つ確率，A が C に勝つ確率，および C が B に勝つ確率はいずれも $\frac{2}{3}$ であり，引き分けはない。

最初に A がボールを持っている場合に，$n$ 回の試行が行われた後で A，B，C がボールを持っている確率をそれぞれ $a_n$，$b_n$，$c_n$ とする。$a_n + b_n + c_n = 1$ に注意して次の問いに答えよ。

**(1)** $a_2$，$a_3$，$a_4$ を求めよ。

**(2)** $a_n$，$b_n$ を $n$ の式で表せ。

**(3)** $\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

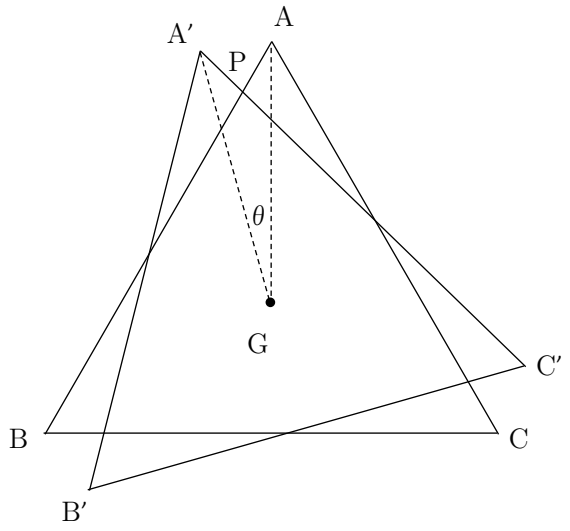
## 問題３

平面上に，下図のように，一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 ABC と，正三角形 ABC をその重心 G のまわりに角度 $\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ 回転させてできる正三角形 A′ B′ C′ がある。$\theta = 0$ のときに頂点 A と頂点 A′，頂点 B と頂点 B′，頂点 C と頂点 C′ が各々重なっていて，$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ のときに頂点 A′ が頂点 B に重なる向きに回転させるとする。$0 < \theta < \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，辺 AB と辺 A′ C′ との交点を P とする。$u = \tan\dfrac{\theta}{2}$ とし，線分 AP の長さを $u$ の関数 $l(u)$ とおく。また，正三角形 ABC で囲まれる部分と正三角形 A′ B′ C′ で囲まれる部分の共通部分の面積を $u$ の関数 $S(u)$ とおく。次の問いに答えよ。

**(1)** 線分 AA′ の長さを $u$ の式で表せ。

**(2)** $l(u)$ を $u$ の式で表せ。

**(3)** $\lim\limits_{u \to \sqrt{3}} l(u)$ の値を求めよ。

**(4)** $S(u)$ を $u$ の式で表せ。

**(5)** $S(u)$ の増減を調べ，最小値とそのときの $\theta$ の値を求めよ。